INFINIT

DOSSIER DE MATEMÀTIQUES

PER ESTUDIAR ELS CONTINGUTS ESSENCIALS I PREPARAR LES PAU

BARCANOVA EDITORIAL

PRESENTACIÓ

Aquest material de Matemàtiques consta d'un dossier pensat per oferir la teoria essencial dels temes més representatius de les matemàtiques de Batxillerat, juntament amb estratègies per resoldre amb èxit les diferents propostes d'exercicis i problemes, i també d'un projecte digital que complementa el dossier.

El dossier està organitzat en tres grans blocs: àlgebra lineal, geometria en l'espai i anàlisi.

En cada bloc hi trobaràs la teoria bàsica i els exercicis i problemes corresponents pensats perquè practiquis diferents tipologies enfocades a la prova d'accés a la universitat (PAU) i adquireixis seguretat per resoldre-les de manera eficaç.

Al llarg del dossier descobriràs una sèrie de pautes, recursos i estratègies perquè fixis la teva atenció en detalls importants per evitar els errors habituals i ser resolutiu a l'hora d'enfrontar-te a activitats de diferent tipus i que requereixen l'aplicació d'habilitats específiques.

Al final del dossier hi ha una proposta de models de PAU per tal que et familiaritzis amb l'estructura i adquireixis destreses, seguretat i rapidesa a l'hora de resoldre-la.

També hi trobaràs les solucions de tots els exercicis i problemes.

El projecte digital consta d'un gran nombre d'exercicis i problemes nous autocorregibles, els punts clau de la teoria per acabar-la de consolidar, més models d'exàmens de les PAU i, també, totes les solucions desenvolupades dels exercicis i problemes del dossier. A més a més, s'hi ha incorporat un bloc de teoria i pràctica de Programació lineal per a aquells alumnes del batxillerat de la modalitat de ciències i tecnologia que vulguin presentar-se a les PAU de Matemàtiques aplicades a les ciències socials de la modalitat d'humanitats i ciències socials.

Desitgem que **INFINIT** es converteixi en un instrument útil en la teva preparació per accedir a la universitat.

ÍNDEX

ÀLGEBRA LINEAL

MATRIUS I DETERMINANTS 7
SISTEMES D'EQUACIONS LINEALS 23

GEOMETRIA EN L'ESPAI

VECTORS EN L'ESPAI 39
EQUACIONS DE LA RECTA I EL PLA. POSICIONS RELATIVES 53
ESPAI MÈTRIC 69

ANÀLISI

DERIVADES I LES SEVES APLICACIONS 85
LÍMITS, CONTINUÏTAT I DERIVABILITAT 101
ESTUDI DE FUNCIONS 116
INTEGRACIÓ 133

POSA'T A PROVA

CRITERIS GENERALS PER A LA CORRECCIÓ 147
MODEL DE PAU 1 148
MODEL DE PAU 2 154

ÀLGEBRA LINEAL

Matrius i determinants

Conceptes clau

Matrius

Una **matriu** real d'**ordre** $m \times n$ és un conjunt de nombres reals agrupats en m files i n columnes:

$A = (a_{ij})$ amb $i = 1, \ldots, m$ i $j = 1, \ldots, n$.
a_{ij} és el terme de la fila i i la columna j de la matriu.

Dues matrius $A = (a_{ij})$ i $B = (b_{ij})$ són iguals si tenen el mateix ordre i els mateixos elements en la mateixa posició: $A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}$ amb $i = 1, \ldots, m$ i $j = 1, \ldots, n$.

La **matriu transposada A^t** d'una matriu A és la resultant d'intercanviar files per columnes.

$$A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Tipus de matrius

Matriu fila: matriu d'ordre $1 \times n$, que té una única fila.

$$A_{1 \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \end{pmatrix}$$

Matriu columna: matriu d'ordre $m \times 1$, que té una única columna.

$$A_{m \times 1} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

Matriu nul·la: matriu en què $a_{ij} = 0$, per a $i = 1, \ldots, m$ i $j = 1, \ldots, n$.

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

Matriu quadrada: matriu que té el mateix nombre de files que de columnes $(m = n)$. Té ordre n i els termes a_{ii} amb $i = 1, \ldots, n$ formen la **diagonal principal**.

$$A_{n \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Una matriu quadrada és **simètrica** si $A = A^t$; és a dir, $a_{ij} = a_{ji}$ amb $i, j = 1, \ldots, n$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Una matriu quadrada és **antisimètrica** si $A = -A^t$; és a dir, $a_{ij} = -a_{ji}$ per a $i, j = 1, \ldots, n$.

Els termes de la diagonal principal són nuls.

$$\begin{pmatrix} 0 & -a_{21} & \ldots & -a_{n1} \\ a_{21} & 0 & \ldots & -a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

Una matriu quadrada és **triangular superior** si té nuls tots el termes per sota de la diagonal principal.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Una matriu quadrada és **triangular inferior** si té nuls tots el termes per sobre de la diagonal principal.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Una matriu quadrada és **diagonal** si és triangular inferior i triangular superior.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Matriu identitat: matriu diagonal en què $a_{ii} = 1$, per a $i = 1, \dots, n$.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Operacions amb matrius

Donades les matrius $A = (a_{ij})$ i $B = (b_{ij})$ i l'escalar $\lambda \in \mathbb{R}$:

Suma i resta de matrius	
$A \pm B = (a_{ij} \pm b_{ij})$ amb $i = 1, \dots, m$ i $j = 1, \dots, n$	• Commutativa: $A + B = B + A$ • Associativa: $(A + B) + C = A + (B + C)$ • Element neutre: $0 + A = A + 0 = A$ Només es poden sumar o restar matrius del mateix ordre.
Producte d'una matriu per un nombre	
$\lambda A = (\lambda a_{ij})$ amb $i = 1, \dots, m$ i $j = 1, \dots, n$	• Distributiva respecte a escalars $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$ • Distributiva respecte a matrius: $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ • Associativa mixta: $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$
Producte de matrius	
$A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} = C_{m \times p}$ $c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj}$ amb $i = 1, \dots, m$ i $j = 1, \dots, p$	• Associativa: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ • Distributiva: $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ • Element neutre: $I \cdot A = A \cdot I = A$ • NO és commutativa. En general, $A \cdot B \neq B \cdot A$ El nombre de columnes de A ha de ser igual que el nombre de files de B.

5 Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a+6 & 3 \\ a-1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, determina per a quins valors de $a \in \mathbb{R}$ la matriu és invertible.

Solució

La condició perquè una matriu sigui invertible és que $\det(A) \neq 0$.

Calculem per a quins valors de a el determinat és nul:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a+6 & 3 \\ a-1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 3(a-1) - [(-1)(a+6)(a-1) + 6(a-1)] = a^2 + 2a - 3 = 0$$

Resolem l'equació de segon grau:

$$a = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 4}{2} \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -3 \end{cases}$$

RECORDA

En les PAU, recorda escriure la fórmula de la resolució de les equacions de 2n grau abans de fer els càlculs.

Aleshores, podem concloure que per a tots els valors $a \neq 1$ i $a \neq -3$ la matriu A és invertible.

6 Calcula el rang de la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & k \end{pmatrix}$ en funció del paràmetre k.

Solució

Per calcular el rang de la matriu, determinem els diferents menors de la matriu en funció de k.

Calculem els valors de k que anul·len el determinant de A:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & k \end{vmatrix} = -2 - (-2k) = 0 \rightarrow k = 1$$

Per a $k \neq 1$, $\text{rang}(A) = 3$.

Si $k = 1$, $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

Si observem el menor $M = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, tenim que $\text{rang}(A) = 2$.

Així, si $k \neq 1$, $\text{rang}(A) = 3$, i si $k = 1$, $\text{rang}(A) = 2$.

RECORDA

El rang d'una matriu és l'ordre màxim de tots els menors no nuls de la matriu. Per fer-ne el càlcul:

1r. Escollim $a_{ij} \neq 0$.

2n. Busquem un menor d'ordre 2 no nul que contingui a_{ij}.

3r. Busquem un menor d'ordre 3 no nul que contingui el menor d'ordre 2 no nul anterior. Si no el trobem, $\text{rang}(A) = 2$.

4t. Repetim el procés fins a l'ordre de la matriu o fins que no quedin menors no nuls.

Practica

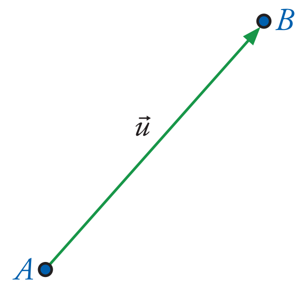
1 Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, calcula les potències A^2, A^3 i A^6.

GEOMETRIA EN L'ESPAI

Vectors en l'espai

Conceptes clau

Vectors lliures en l'espai



Components: $\left.\begin{array}{l} A(a_1, a_2, a_3) \\ B(b_1, b_2, b_3) \end{array}\right\} \rightarrow \overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$

Mòdul: $|\overrightarrow{AB}| = \mathrm{d}(A, B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$

- **Vector unitari**: vector que té mòdul 1.
- Dos **vectors iguals** tenen les mateixes components: $\vec{u} = \vec{v} \rightarrow \begin{cases} u_1 = v_1 \\ u_2 = v_2. \\ u_3 = v_3 \end{cases}$
- Dos **vectors proporcionals** tenen la mateixa direcció: $\vec{u} = \lambda\vec{v}$.

Si dos vectors són proporcionals, aleshores: $\vec{u} = \lambda\vec{v} \rightarrow \dfrac{u_1}{v_1} = \dfrac{u_2}{v_2} = \dfrac{u_3}{v_3}$.

Si, en comprovar que dos vectors són proporcionals, les seves components respectives són iguals a 0, la component estudiada es considera proporcional.

Combinació lineal de vectors. Vectors dependents i independents

Un vector $\vec{u}$ és combinació lineal de $\vec{v}$ i $\vec{w}$ si existeixen λ i β que compleixen $\vec{u} = \lambda\vec{v} + \beta\vec{w}$; en aquest cas, $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$ són **linealment dependents**. Si no existeixen λ i β, els vectors són **linealment independents**.

En l'espai, cal combinar linealment com a mínim tres vectors per obtenir qualsevol altre vector. Aquest conjunt mínim de tres vectors s'anomena **base de l'espai**. S'acostuma a treballar sempre amb la **base canònica**: $\{\vec{i}(1,0,0), \vec{j}(0,1,0), \vec{k}(0,0,1)\}$.

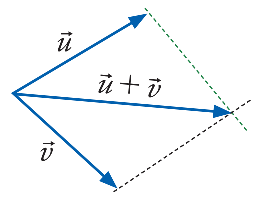
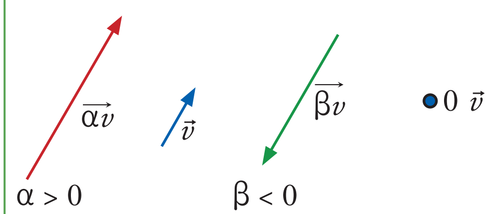
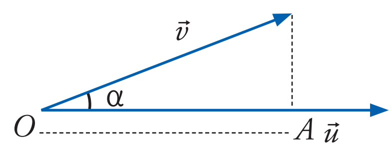
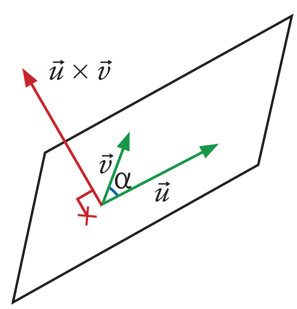
Tres vectors linealment dependents són **coplanaris**, és a dir, són en el mateix pla.

Fent servir les propietats dels determinants, es pot saber de manera pràctica si tres vectors són linealment dependents o independents:

- $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$ són linealment dependents si $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$.
- $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$ són linealment independents si $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \neq 0$.

Operacions amb vectors

Donats els vectors $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3),\ \vec{v}=(v_1,v_2,v_3),\ \vec{w}=(w_1,w_2,w_3)$:

	Càlcul	Interpretació geomètrica
Suma i resta	$\vec{u}+\vec{v}=(u_1+v_1,u_2+v_2,u_3+v_3)$ $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})=(u_1-v_1,u_2-v_2,u_3-v_3)$	
Multiplicació per un nombre λ	$\lambda\cdot\vec{v}=(\lambda v_1,\lambda v_2,\lambda v_3)$	
Producte escalar (·)	Es calcula entre dos vectors i el resultat és un nombre. $\vec{u}\cdot\vec{v}=\lvert\vec{u}\rvert\cdot\lvert\vec{v}\rvert\cdot\cos(\vec{u},\vec{v})$ $\vec{u}\cdot\vec{v}=u_1\cdot v_1+u_2\cdot v_2+u_3\cdot v_3$	 OA = Projecció de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ $\alpha=\arccos\left(\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\lvert\vec{u}\rvert\cdot\lvert\vec{v}\rvert}\right)$ $\vec{u}\cdot\vec{v}=\lvert\vec{u}\rvert\cdot\lvert\mathrm{Proj}_{\vec{v}}\vec{u}\rvert$ $\vec{u},\ \vec{v}$ són ortogonals si $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$
Producte vectorial (×)	Es calcula entre dos vectors i el resultat és un altre vector, perpendicular a tots dos. $\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix}=$ $=w_1\cdot\vec{i}+w_2\cdot\vec{j}+w_3\cdot\vec{k}=(w_1,w_2,w_3)$ $\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}u_2 & u_3\\ v_2 & v_3\end{vmatrix}\cdot\vec{i}-\begin{vmatrix}u_1 & u_3\\ v_1 & v_3\end{vmatrix}\cdot\vec{j}+\begin{vmatrix}u_1 & u_2\\ v_1 & v_2\end{vmatrix}\cdot\vec{k}$	 $\vec{w}=\vec{u}\times\vec{v}\rightarrow\begin{cases}\vec{u}\perp\vec{w}\\ \vec{v}\perp\vec{w}\end{cases}$ $\lvert\vec{u}\times\vec{v}\rvert$ = Àrea del paral·lelogram $\dfrac{\lvert\vec{u}\times\vec{v}\rvert}{2}$ = Àrea del triangle

Exemples resolts

1 Donats els vectors $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$, de components $\vec{u}=(k,1,3)$, $\vec{v}=(0,2,k)$ i $\vec{w}=(k,-1,k)$, calcula:

a) El valor o els valors del paràmetre k per tal que els vectors siguin linealment dependents.

b) El valor o els valors del paràmetre k per tal que el volum del tetraedre d'arestes $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$ sigui $\frac{5}{3}$ u^3.

Solució

a) Tres vectors són linealment dependents si el determinant que formen és zero:

$$\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=\begin{vmatrix} k & 1 & 3 \\ 0 & 2 & k \\ k & -1 & k \end{vmatrix}=2k^2+k^2-6k+k^2=4k^2-6k=0$$

Resolem l'equació de segon grau incompleta:

$$4k^2-6k=k(4k-6)=0\rightarrow\begin{cases} k=0 \\ 4k-6=0\rightarrow k=\frac{3}{2} \end{cases}$$

Per tant, si $k=0$ o $k=\frac{3}{2}$, els tres vectors són linealment dependents. En qualsevol altre cas, els tres vectors són linealment independents.

b) El volum del tetraedre que formen tres vectors és la sisena part del valor absolut del producte mixt entre els tres vectors:

$$\text{Volum}=\frac{|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]|}{6}=\frac{|\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})|}{6}=\frac{\left|\begin{vmatrix} k & 1 & 3 \\ 0 & 2 & k \\ k & -1 & k \end{vmatrix}\right|}{6}=\frac{|4k^2-6k|}{6}=\frac{5}{3}$$

FIXA-T'HI

Si hi ha un valor absolut, l'equació tindrà dues solucions.

Resolem l'equació: $\frac{|4k^2-6k|}{6}=\frac{5}{3}\rightarrow|4k^2-6k|=10\rightarrow$

$$\begin{cases} 4k^2-6k=10\rightarrow 4k^2-6k-10=0\rightarrow\begin{cases} k=-1 \\ k=\frac{5}{2} \end{cases} \\ 4k^2-6k=-10\rightarrow 4k^2-6k+10=0\rightarrow k=\frac{6\pm\sqrt{-124}}{8}\rightarrow \text{No té solució.} \end{cases}$$

FIXA-T'HI

Segons la normativa PAU, tot i que l'equació de 2n grau es pot resoldre amb la calculadora, cal escriure l'expressió per trobar la solució.

Si $k=-1$ o $k=\frac{5}{2}$, el volum del tetraedre que formen els vectors és $\frac{5}{3}$ u^3.

8 Donats els vectors $\vec{u}=(1,2,0)$ i $\vec{v}=(2,1,-1)$, resol:

a) Tenen la mateixa direcció?

b) Calcula l'angle que formen.

c) Són ortogonals? Per què?

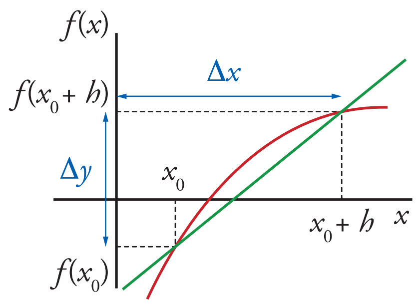
9 Calcula les coordenades del punt mitjà del segment d'extrems $A(-1,3,5)$ i $B(4,3,-2)$.

ANÀLISI

Derivades i les seves aplicacions

Conceptes clau

Taxa de variació mitjana



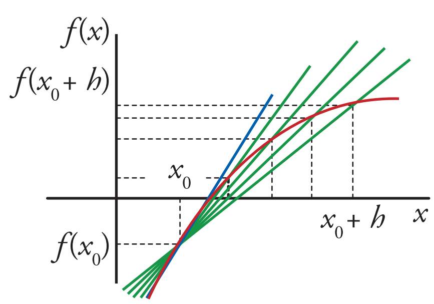
La **taxa de variació mitjana** o **quocient incremental** de la funció contínua en un interval $[x_0, x_0+h]$ és la velocitat mitjana de canvi de la funció en aquest interval:

$$\mathrm{TVM}[x_0, x_0+h] = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Gràficament, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ és el **pendent de la recta secant** que passa pels punts $P_0(x_0, f(x_0))$ i $(x_0+h, f(x_0+h))$ i la seva equació punt-pendent és $y-f(x_0)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\cdot(x-x_0)$.

La **taxa instantània de variació** és $V_i(x_0) = \lim\limits_{h\to\infty} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

Derivada d'una funció en un punt



És el valor de la taxa instantània de variació de $f(x)$ en un punt $x=x_0$ en el qual el límit existeix i és finit:

$$f'(x_0) = \lim_{h\to\infty} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Gràficament, $f'(x_0)$ és el **pendent de la recta tangent** a la gràfica de la funció en el punt x_0: $y-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(x-x_0)$.

Derivada d'una funció

És una funció que dona el valor de la derivada per a cada valor d'abscissa x de $f(x)$:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Operacions amb derivades

$$f(x)=g(x)\pm h(x) \longrightarrow f'(x)=g'(x)\pm h'(x)$$

$$f(x)=g(x)\cdot h(x) \longrightarrow f'(x)=g'(x)\cdot h(x) + g(x)\cdot h'(x)$$

$$f(x)=\frac{g(x)}{h(x)} \longrightarrow f'(x)=\frac{g'(x)\cdot h(x)-g(x)\cdot h'(x)}{[h(x)]^2}$$

$$(f\circ g)(x)=f[g(x)] \longrightarrow (f\circ g)'(x)=f'[g(x)]=f'[g(x)]\cdot g'(x)$$

Tangències

L'equació de la **recta tangent** a una funció en un punt d'abscissa $x = x_0$ és $y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$.

La **recta normal** és la recta perpendicular a la tangent en el punt de tangència.

El seu pendent és $m_{\text{normal}} = \dfrac{-1}{m_{\text{tangent}}}$ i la seva equació és $y - f(x_0) = \dfrac{-1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$.

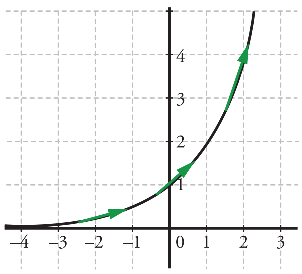
Estudi de monotonia

Consisteix a trobar els intervals del domini on la funció creix i decreix i a classificar i a trobar les coordenades dels extrems relatius, si existeixen. A la pràctica, això implica **estudiar el signe de la derivada de la funció**.

$f(x)$ **és creixent en** $[a, b]$:

$f'(x) > 0 \quad \forall x \in [a, b]$

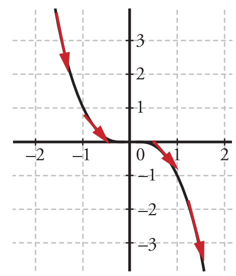
El pendent de $f(x)$ és positiu.



$f(x)$ **és decreixent en** $[a, b]$:

$f'(x) < 0 \quad \forall x \in [a, b]$

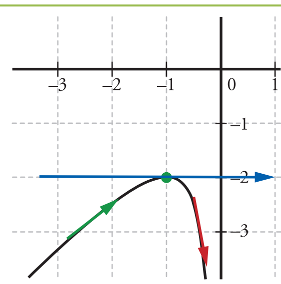
El pendent de $f(x)$ és negatiu.



Si $f'(x_0) = 0$ i $f'(x)$ canvia de signe en $x = x_0$, $f(x)$ té un **extrem relatiu** en $x = x_0$.

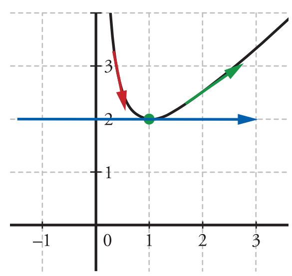
$f(x)$ té un **màxim relatiu:**

El signe de $f'(x)$ passa de positiu a negatiu.



$f(x)$ té un **mínim relatiu:**

El signe de $f'(x)$ passa de negatiu a positiu.



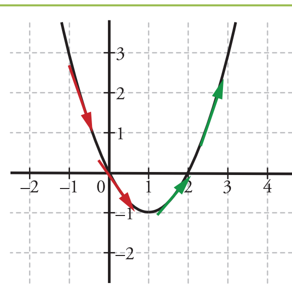
Estudi de curvatura

Consisteix a trobar els intervals del domini on el pendent de la funció creix i decreix i a classificar i a trobar les coordenades dels punts on canvia de tendència, si existeixen. A la pràctica, això implica **estudiar el signe de la segona derivada de la funció**.

$f(x)$ és **convexa** en $[a, b]$:

$f''(x) > 0 \quad \forall x \in [a, b]$.

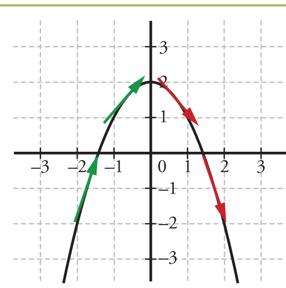
El pendent creix en $[a, b]$.



$f(x)$ és **còncava** en $[a, b]$:

$f''(x) < 0 \quad \forall x \in [a, b]$.

El pendent decreix en $[a, b]$.

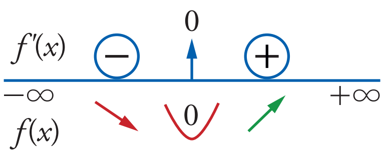


8 Estudia la monotonia de la funció $f(x) = \sqrt{1+x^2}$.

Solució

Com que $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$ i $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $f'(x) = 0 \to x = 0$. La derivada només pot canviar de signe en $x = 0$.

Estudiem el signe de $f'(x)$. Calculem, per exemple, $f'(-1) < 0$ i $f'(1) > 0$ i assignem signes als intervals:



x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	mín. rel.	↗

Com que $f(0) = 1$, el mínim relatiu és el punt (0, 1).

$f(x)$ és decreixent $\forall x \in (-\infty, 0)$, creixent $\forall x \in (0, +\infty)$ i té un mínim relatiu en el punt $(0, 1)$.

FIXA-T'HI

Expressem els extrems relatius i els punts d'inflexió especificant-ne les dues coordenades.

9 L'Ajuntament vol construir un camí d'accés a una carretera recta des d'una propietat situada a l'origen de coordenades. La carretera correspon a la recta d'equació $2x + y = 8$ (x i y en km.). Com cal fer el camí perquè sigui tan curt com sigui possible? Quina és la distància mínima?

Solució

La funció objectiu és la distància del punt $P(0,0)$ a la recta. L'equació de la recta és la restricció que permet expressar la distància en funció d'una única variable.

Si $P(x,y)$ és el punt que busquem, la distància $d(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ amb $y = 8 - 2x$ és aquesta:

$$d(x) = \sqrt{x^2 + (8 - 2x)^2} = \sqrt{5x^2 - 32x + 64}$$

Estudiem el signe de la derivada per comprovar si $d(x)$ té un mínim relatiu:

$$d'(x) = \frac{10x - 32}{2\sqrt{5x^2 - 32x + 64}} = 0 \to 10x - 32 = 0 \to x = 3{,}2$$

I calculem, per exemple, $d'(0) < 0$ i $d'(5) > 0$.

Segons l'estudi del signe de la derivada, podem afirmar que el mínim absolut de $d(x)$ s'assoleix en el mateix mínim relatiu, per a $x = 3{,}2$ km.

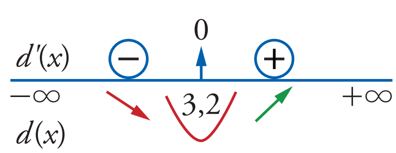
Com que $y = 8 - 2x \to y = 8 - 6{,}4 = 1{,}6$ km, $P = (3{,}2,\ 2{,}6)$ i la distància mínima és $d(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3{,}2^2 + 1{,}6^2} \approx 3{,}58$ km.

FIXA-T'HI

En els problemes d'optimització sovint hi ha més d'una variable. En aquests casos, a partir de la informació de l'enunciat, plantegem equacions que ens permetin reduir el nombre de variables.

RECORDA

La distància entre dos punts és el mòdul del segment que defineixen.

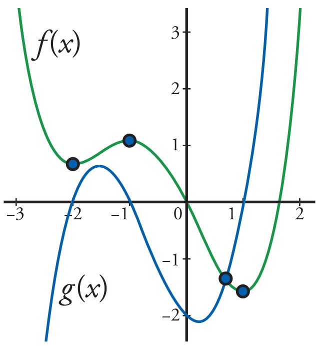


BARCANOVA EDITORIAL

3 Deriva les funcions següents:

a) $f(x) = x^2 \cdot \sin(2x)$ b) $f(x) = \cos^2(4x)$ c) $f(x) = 2x - \tan\sqrt{x}$ d) $f(x) = 2x^{\cos x}$

4 De les funcions següents, una és la derivada de l'altra.



a) Decideix raonadament quina de les dues és la derivada.

b) Troba les equacions de les rectes tangent i normal a la gràfica de $f(x)$ en el punt d'abscissa 0.

c) Determina la taxa de variació mitjana de $g(x)$ en l'interval $[-2, 0]$.

d) Calcula la taxa de variació instantània de $f(x)$ en els punts d'abscissa $x = -2$ i $x = 0$.

BARCANOVA EDITORIAL

POSA'T A PROVA

Responeu a QUATRE de les sis qüestions de les proves següents.
En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.
Cada qüestió val 2,5 punts.

Criteris generals per a la correcció

1 En tots els casos la resolució que fa l'estudiant s'ha de poder seguir i els passos que fa s'han de poder comprendre. **Aquelles respostes, parcials o totals, que no estiguin desenvolupades o que no permetin seguir com s'ha arribat a donar la solució seran puntuades amb 0 punts.**

2 La resolució proposada és, en alguns casos, una de les possibles i no és, en principi, única. Per tant, **sempre que l'enunciat ho permeti, en el cas que l'estudiant respongui amb una resolució alternativa totalment correcta se li assignarà el total de puntuació de l'apartat.** Si la resposta és parcial, la puntuació obtinguda serà proporcional a la part corresponent de la puntuació total.

3 En alguns casos, la solució final pot admetre **expressions equivalents**. Si és així, la puntuació serà la totalitat de la puntuació de l'apartat.

4 Tots els exercicis, apartats i passos dins d'un apartat es valoraran amb múltiples de 0,25 punts.

5 **Penalització per errades de càlcul o transcripció:**

- Si l'errada que es comet no té més transcendència, aleshores NO es descomptarà res de la puntuació parcial de l'apartat.
- En el cas que l'errada condueixi a derivacions paral·leles de l'enunciat, es valoraran i es puntuaran el desenvolupament i la coherència de la resolució resultant, i només s'aplicarà una penalització final de 0,25 punts.
- En cas que l'errada faci que alguna de les qüestions que es demanen no tingui sentit, la puntuació màxima de l'apartat serà de 0,75 punts.
- Si la resolució d'un apartat conté dues errades, la puntuació de l'apartat serà l'acumulada fins al moment previ a la segona errada.

Model de PAU 2

1 Donada la funció $f(x) = -x^2 + 9$ per a $x > 0$:

a) Comproveu que la superfície del triangle rectangle que defineix la recta tangent a la gràfica pel punt d'abscissa $x = a$ amb els semieixos positius està representada per la funció $S(a) = \dfrac{(a^2+9)^2}{4a}$. [1,25 punts]

b) Trobeu l'abscissa a perquè aquesta superfície sigui mínima i determineu el valor mínim de la superfície. [1,25 punts]

2 Donades les matrius $C=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ i $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 3 & -1\end{pmatrix}$:

a) Comproveu que $C^{-1}=C^{2}$ i deduïu C^{6}. [1,25 punts]

b) Calculeu la matriu X que compleix que $X\cdot C=A$. [1,25 punts]

POSA'T A PROVA

3 Donades les coordenades del punt $A(1,-1,0)$ i la recta $r\colon \begin{cases} \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y}{1} \\ z = -2 \end{cases}$

a) Calculeu les coordenades del punt simètric de A respecte de la recta r. [1,25 punts]

b) Si anomenem A' el punt simètric de A respecte de r, calculeu les coordenades dels punts P de r tals que el triangle APA' sigui rectangle en P. [1,25 punts]

4 Donada la funció $f(x)=\begin{cases} ax+2 & \text{si } x\le 0 \\ a+\ln(bx+1) & \text{si } x>0 \end{cases}$

a) Trobeu els valors de a i b perquè $f(x)$ sigui contínua i derivable en tot $\mathbb{R}$. [1 punt]

b) Per a aquests valors de a i b, trobeu els talls amb els eixos, estudieu-ne la monotonia i feu l'esbós de la gràfica de $f(x)$. [1,5 punts]

5 Donada la funció $f(x) = x \cdot e^x - 1$:

a) Demostreu que talla l'eix *OX* almenys una vegada en l'interval [0, 1]. [0,75 punts]

b) Estudieu el signe de $f(x)$ i el de la seva derivada per comprovar que aquest tall és únic en tot $\mathbb{R}$. [0,75 punts]

c) Trobeu l'expressió de la derivada enèsima de $f(x)$. [1 punt]

6 Donat el sistema d'equacions $\begin{cases} x+(a-1)z=1 \\ x+ay+z=0 \\ 4x+3ay+z=3 \end{cases}$

a) Discutiu, segons els valors del paràmetre a, la classificació del sistema. [1,5 punts]

b) Escriviu les solucions en el cas que el sistema sigui compatible. [1 punt]